АСТАНА ҚАЛАСЫ ӘКІМДІГІНІҢ БІЛІМ БАСҚАРМАСЫ
УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ АКИМАТА ГОРОДА АСТАНЫ

Автор курса:
Байболова Кульнара Мажимовна
учитель математики высшей категории
ГУ «школа-лицей №59»
г. Астана

Программа курса по выбору: «Решение нестандартных задач по геометрии»

(методическое пособие для учителей, работающих в 11-х классах)

г.Астана
2018

Протокол №2
Рассмотрено на заседании учебно-методического совета школы лицея №59 г Астаны 29.12.2017.

Рецензент: Шуиншина Ш. М.- заведующая лабораторией естественно- математического образования НАО имени Ы.Алтынсарина, кандидат педагогических наук, доцент.

Содержание

Рецензия

на программу курса по выбору

« «Решение нестандартных задач по геометрии».

Данная программа разработана учителем математики школы- лицея №59 г Астаны Байболовой Кульнарой. В программу включены темы:

• решение задач по теме «Свойства биссектрис, медиан и высот в треугольнике»;
• задачи на свойства вписанных и описанных многоугольников;
• вычисление площадей плоских фигур;
• свойства окружности и ее частей;
• задачи на построение сечений;
• задачи на вычисление площадей поверхностей и объемов тел;
• задачи по теме «векторы»;
• задачи по теме «Сфера и шар».

Материал программы способствует более глубокому изучению основных тем планиметрии и стереометрии, помогает развитию логического мышления и пространственного представления у учащихся, дает возможность успешно справляться с геометрическими задачами на экзаменах и ориентацию на политехнические профессии.

Программа соответствует требованиям профильной подготовки учащихся по геометрии и может быть рекомендована преподавателям математики, работающим в профильных классах.

Руководитель методического объединения учителей математики,физики и информатики школы-лицея №59 г Астаны Нукенова А.К.

РЕЦЕНЗИЯ

на программу курса по выбору «Решение нестандартных задач по геометрии» автора Байболовой К.М., учителя математики школы-лицея № 59 г Астаны.

Данный курс предназначен учащимся 11-х классов, желающим расширить и углубить свои знания по геометрии, получить конкретную помощь в развитии умения решать геометрические задачи, взятые из школьных учебников, практики вступительных экзаменов в вузы. Практикум решения геометрических задач направлен на развитие математического кругозора, творческих способностей учащихся, на привитие навыков самостоятельной работы и тем самым на повышение качества математической подготовки учащихся и успешной сдачи ЕНТ.

Цель курса: Формирование учащихся навыков исследовательской деятельности, умение анализировать, рассуждать и на основе этого делать выводы, систематизировать знания учащихся по геометрии и развить предметные компетенции.

Программа курса состоит из 9 тем: Треугольники, его основные элементы и формулы. Окружность, касательная и хорда. Многоугольники. Применение метода координат к решению задач. Основные определения и теоремы стереометрии. Многогранники. Тела вращения. В программе курса по выбору есть приложения-решения задач на все темы и задания для самостоятельной работы.

На занятиях курса по выбору особое внимание уделяется процессу поиска решения геометрической задачи, различным методам решений одной задачи и поиску общей идеи решения разных задач.

Программа курса по выбору предполагает формирование культуры чертежей и вычислений, развитие логики и умения применять различные способы решений задач.

Путь развития при изучении геометрии состоит в формировании в среде учащихся характерных для этого предмета приемов мыслительной деятельности. При этом, с точки зрения воспитания творческой личности, особенно важно, чтобы в структуру умственной деятельности школьников помимо алгоритмических умений и навыков, фиксированных в стандартных правилах, формулах и способах действий, вошли нестандартные приемы, как общего, так и конкретного характера.

Владение этими приемами необходимо для самостоятельного управления процессом решения творческих нестандартных задач, применения знаний в новых, необычных ситуациях. Каждое занятие сопровождается рассказом о возникновении и развитии геометрии , интересными фактами из биографии известных учёных, внёсших весомый вклад в развитие этой науки.

Рекомендовать данную программу курса по выбору «Решение нестандартных задач по геометрии» автора Байболовой К.М., учителя математики школы-лицея № 59 г Астаны для использования в учебно-воспитательном процессе.

Рецензент:
НАО им. Ы. Алтынсарина,
заведующая лабораторией
естественно-математического образования,
кандидат педагогических наук, доцент **Ш.Шуиншина**

Пояснительная записка.

Курсы по выбору **«Решение нестандартных задач по геометрии»** - новый элемент учебного плана, дополняющий содержание профиля, что позволяет ученикам научиться решать задачи по геометрии и применять полученные знания в практической деятельности: (практико-ориентированные задачи на местности- определение расстояния между предметами, укладка брусчатки, засев круглой клумбы, при строительстве и т.д.).
Как показывает практика, что решение именно геометрических задач вызывает определенные трудности у учащихся, как в процессе изучения, так и при сдаче ЕНТ: учащиеся плохо справляются с геометрическими заданиями или вообще не приступают к ним. Можно выделить следующие недостатки в геометрической подготовке выпускников: формальное усвоение теоретического содержания курса геометрии, неумение использовать изученный материал в ситуации и, которая отличается от стандартной. Для успешного выполнения заданий итоговой аттестации, в том числе и ЕНТ необходимы прочные знания основных геометрических фактов и опыт в решении геометрических задач. При изучении математики в старших классах на профильном уровне необходимы систематизация знаний, полученных учащимися в основной школе, выделение общих методов и приемов решения геометрических задач, демонстрация техники решения геометрических задач, закрепление навыков решения геометрических задач. В связи с этим необходимо делать акцент не только на овладение теоретическими фактами, но и на развитие умений решать геометрические задачи разного уровня сложности и математически грамотно их записывать. Повторение геометрического материала по разделам позволяет реализовать широкие возможности для дифференцированного обучения учащихся. Научить детей решать задачи, это значит нужно сформировать у них навыки исследовательской деятельности, умений анализировать, рассуждать и на основании этого делать выводы. Решение нестандартных задач по геометрии способствует развитию логического мышления учащихся, формированию геометрических представлений, расширению и углублению знаний по предмету и умения применять полученные знания в практической деятельности. Рассмотрение избранных теорем планиметрии, выходящих за рамки основного курса, а также решение избранных задач различными методами подчеркивают красоту содержания учебного предмета, способствуют воспитанию эстетического восприятия геометрии, помогает выбирать из всех известных методов решения или доказательства наиболее рациональный.

Актуальность и перспектива курса:

Материал курса направлен на развитие логического мышления, сообразительности, наблюдательности. Геометрические задачи вызывают трудности у многих учащихся. Программа курсов по выбору «Решение нестандартных задач по геометрии» для обучающихся старшей профильной школы приобретает еще большую значимость в связи с практической ориентацией образовательного процесса, способствующей успешной подготовке учащихся к итоговой аттестации по математике и сдаче ЕНТ. Развертывание учебного материала четко структурировано и соответствует задачам курса.

Новизна:Запланированный данной программой для усвоения учащимися объем знаний необходим для овладения ими методами решения некоторых классов задач. Курс содержит теоретическое обоснование к каждому разделу геометрии, являющиеся небольшим справочником по теоретическому материалу, позволяющий систематизировать базовый уровень, теоретические знания учащихся. К темам курса подобраны задачи (см. приложения) различной трудности и тесты. Самостоятельные работы и тесты представлены в порядке возрастания трудности, переходя к достаточно сложным задачам, которые сопровождаются ответами. Тестовые задания позволяют своевременно провести коррекцию знаний учащихся и предупредить пробелы.

Связь программы курса и новостей образования РК:

1. Обновление школы, ориентированное на новый социальный заказ общества, развитие школьного математического образования на качественно новом уровне невозможно без овладения системой знаний и умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования;

2.интеллектуальное развитие, формирование свойственных математической деятельности качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясности и точности мысли, критичности мышления, интуиции, логического мышления, элементов алгоритмической культуры, способности к преодолению трудностей;

3.формирование представлений об идеях и методах геометрии как универсального языка науки и техники, средства моделирования явлений и процессов; воспитание культуры личности, отношения к предмету как к части общечеловеческой культуры, играющей особую роль в общественном развитии.

Цель курса: Формирование навыков исследовательской деятельности учащихся , умение анализировать, рассуждать и на основе этого делать выводы, систематизировать знания учащихся по геометрии и развивать предметные компетенции.

Задачи курса: Развивать общее мировоззрение учащихся, активизировать интерес старшеклассников к предмету «Геометрия»;

обобщить наиболее важные темы курса геометрии, необходимые для дальнейшего применения в практической деятельности;

воспитывать самостоятельность, развивать логическое мышление;

готовить учащихся к проектной деятельности для дальнейшего развития социально активной, грамотной личности;

Программа курса по выбору «Решение нестандартных задач по геометрии» предназначена для учащихся 11 класса, рассчитана на 34 часа.

Формы проведения:

Общеклассные формы: урок, практикумы с элементами лекций, беседы, дискуссии, проверочные работы, тесты.

Групповые формы: групповая работа на уроке, групповые творческие задания.

Индивидуальные формы: работа с литературой, письменные упражнения, выполнение индивидуальных заданий.

Формы контроля: зачетная и практическая работа. Практическая работа позволяет отслеживать уровень освоения курса учащимися на протяжении всего времени.

Требования к уровню подготовки учащихся.

В результате изучения курса по выбору ученик должен

Знать\понимать:

-Точно и грамотно формулировать теоретические положения и излагать собственные рассуждения в ходе решения заданий;

-Усвоить основные типы, приемы и методы решения задач;

-Проводить полное обоснование при решении задач;

Уметь:

-Уверенно решать задачи на вычисление, доказательство и построение;

- Применять аппарат алгебры и тригонометрии к решению геометрических задач;

- Применять свойства геометрических преобразований к решению практико-ориентированных задач.

Введение. Тема № 1(1 час)
Применение геометрии в быту, науке, технике и искусстве.
Геометрия у древних людей; Геометрия в быту; Геометрия в архитектуре;
Геометрия транспорта; Комбинации окружающем нас мире; Природные творения в виде геометрических фигур; Использование геометрических форм животными

Тема № 2 (5 часов)

Треугольник, его элементы, основные элементы и формулы.

Необходимое и достаточное условие существование треугольника

(c < a + b).Сумма углов треугольника. Равенство треугольников. Биссектриса треугольника. Биссектриса внутреннего угла треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла (биссектриса – ось симметрии сторон угла). Медианы треугольника, центр тяжести треугольника. высоты треугольника. средняя линия треугольника, средняя линия треугольника. Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности. Прямоугольный треугольник. Решение треугольников. Теорема косинусов. Теорема синусов. Теорема Менелая.Решение задач на треугольники (см. приложение 1).Задание для самостоятельной работы (см. приложения 1.1.).

Тема № 3 (5 часов)

Окружность. Касательная и хорда. Теоремы и формулы.Угол, вписанный в окружность.Угол, опирающийся на диаметр - прямой.Угол между касательной и секущей.Угол, образованный двумя секущими.
Решение задач на окружность (см. приложение 2.).Задание для самостоятельной работы (см. приложение 2.1.).

Тема № 4 (8 часов)

Многоугольники.

Сумма внутренних углов выпуклого n - угольника.Сумма всех внешних углов n-угольника не зависит от числа его сторон и всегда равна четырем прямым $4d = 360°$. Сумма углов выпуклого четырехугольника .Площадь выпуклого четырехугольника $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$. В четырехугольнике можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$. Около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Частными случаями выпуклого четырехугольника являются: параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция.
(параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция – это выпуклые четырехугольники. Решение задач на многоугольники (см. приложении).Задание для самостоятельной работы (см. приложения 3.1.).

Тема № 5 (2 часа)

Применение метода координат к решению задач.

Длина отрезка АВ. Уравнение прямой,угловой коэффициент прямой, тангенс угла наклона прямой к положительной полуоси ОХ. Паралельные и совпадающие прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Признак перпендикулярности двух прямых.

Применение метода координат к решению задач (см. приложение 4).

Задание для самостоятельной работы (см. приложения 4.1.).

Тема № 6 (2 часа)

Стереометрия. Основные определения и теоремы.

Паралельность и перпендикулярность плоскостей. Перпендикуляр и наклонная.Угол между наклонной и плоскостью. Двугранный угол.Линейный угол двугранного угла. Величина двугранного угла.

Тема № 7 (5 часов)

Многогранники. Основные формулы.

Прямые и наклонные призмы. Правильные многогранники. Параллелепипед. Пирамида. Правильная пирамида .Площадь боковой и полной поверхности пирамиды. Апофема пирамиды.Усеченная пирамида.
Сечения пирамиды. Пять типов правильных многогранников(тетраэдр (4 треугольника, 6 ребер, 4 вершины), куб (6 квадратов, 12 ребер, 8 вершин), октаэдр (8 треугольников, 12 ребер, 6 вершин), додекаэдр (12 пятиугольников, 30 ребер, 20 вершин), икосаэдр (20 треугольников, 30 ребер, 12 вершин)).Решение задач на многогранники (см. приложение 5).
Задание для самостоятельной работы (см. приложения 5.1.).

Тема № 8 (5 часов)

Тела вращения.

Цилиндр.Прямой круговой конус,усеченный конус.Боковая поверхность конуса(усеченного конуса). Полная поверхность конуса(усеченного конуса). Сфера, шар. Шаровой сектор, шаровой сегмент.Площадь сферы.Решение задач на тела вращения (см. приложение 6).
Задание для самостоятельной работы (см. приложение 6.1.).
Итоговый тест (см. приложение 6.2.).

Тема № 9 (1 час)

Подведение итогов.

Защита проектных работ учащихся.

Творческая письменная работа «Применение геометрии в быту»

Тематическое планирование.

№ п.п.	Название темы	Общее количество часов	Дата проведения
1.	Введение.	1	
2.	Треугольник, его элементы, основные элементы и формулы.	5	
3.	Окружность. Касательная и хорда. Теоремы и формулы.	5	
4.	Многоугольники.	8	
5.	Применение метода координат к решению задач.	2	
6.	Стереометрия. Основные определения и теоремы.	2	
7.	Многогранники. Основные формулы.	5	
8.	Тела вращения.	5	
9.	Подведение итогов.	1	
	ИТОГО:	34	

Литература для учителя:

1. К.А. Хасеинов «Каноны математики» Алматы ММШ 2003 г
2.С.Б. Веселовский, В.Д. Рябчинская «Геометрия дл 11 классов, дидактические материалы» Москва. Просвещение. 2003 год
3.Б.В. Гнеденко «Математика и математическое образование в современном мире» Москва. Просвещение. 1985 год
4. Г.Д.Глейзер «Повышение эффективности обучения математике в школе» Москва. Просвещение. 1989 год
5. И.Л. Никольская, В.В. Фирсов «Методика факультативных занятий в 9-10 классах» Москва. Просвещение. 1983 год
6. А.И.Медяник «Учителю о школьном курсе геометрии» книга для учителя Москва. Просвещение. 1984 год
7.Т.Т.Абылайханов «Математика есептері» Алматы. Рауан.1995 жыл
8. М.Н.Никитин ,Г.Г. Маслова «Сборник задач по геометрии» Москва. Просвещение. 1985 год
9.А.В.Погорелов «Элементарная геометрия. Планиметрия» Издательство «Наука» Москва 1969 год

Литература для учащихся:

1.Ш.Фатих «Математика. Учебное пособие и сборник тестов для поступающих в вузы» Алматы. ШЫҢ кітап 2009 жыл
2. И.П. Рустюмова, С.Т. Рустюмова « Пособия для подготовки к ЕНТ по математике» Алматы 2008 год
3. А.Я. Симонов и другие «Система тренировочных задач и упражнений по математике» Москва. Просвещение. 1991 год
4.Н.В. Егоркина «Математика для поступающих в вузы» часть 1-2 Кокшетау «Келешек -2030»
5. А.В.Погорелов «Геометрия. 10-11 классы» Москва. Просвещение.

Приложения.

1. Решение задач на треугольники.

Основные правила решения геометрических задач.

1. Сделать чертеж строго по условию задачи. Например, если задан произвольный (разносторонний) треугольник, то нельзя его изображать равнобедренным. Чертеж должен быть большим и аккуратным (неряшливый чертеж затрудняет решение задачи).

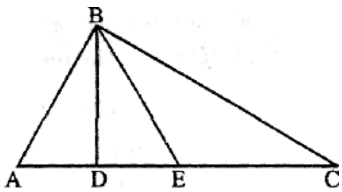
2. Записать условие и требование задачи в обозначениях чертежа (что дано и что нужно найти).

3. Провести анализ, т.е. установить, как можно связать между собой данные и искомые величины, используя теорию; какие промежуточные величины необходимо для этого найти; какие сделать дополнительные построения на чертеже. Провести анализ помогает знание основных методов решения геометрических задач.

4. Оформить решение в виде последовательности действий, делая краткие ссылки на соответствующую теорию.

5. Записать ответ, который должен содержать только данные по условию величины.

Пример 1. В треугольнике основание равно 60 см, высота 12 см и медиана, проведенная к основанию, равна 13 см. Определить боковые стороны.



Решение. Из ΔBDE, где $BD = 12$ (см), $BE = 13$ (см) находим $DE = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). Следовательно, $AD = AE - DE = \frac{1}{2}AC - DE = \frac{1}{2} \cdot 60 - 5 = 25$ (см).

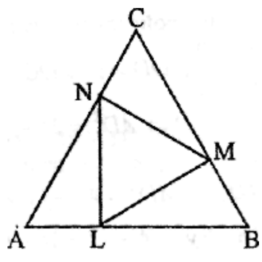
$DC = EC + DE = 35$ (см).

Боковые стороны находим из ΔABD и ΔDBC по теореме Пифагора находим $AB = \sqrt{769}$ см, $BC = \sqrt{1369} = 37$ см.

Ответ: $AB = \sqrt{769}$ см, $BC = \sqrt{1369} = 37$ см.

Пример 2. В равносторонний треугольник ABC, сторона которого a, вписан другой равносторонний треугольник LMN вершины которого лежат на сторонах первого треугольника и делят каждую, из них в отношении $1:2$. Определить площадь треугольника LMN.

Решение. Площадь ΔABC:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

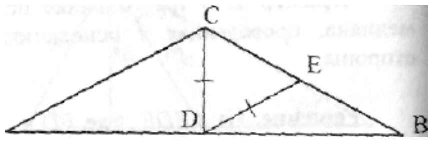
$\Delta ALN = \Delta LMB = \Delta MNC$ (по двум сторонам и углу)

$$S_{\Delta ALN} = \frac{1}{2}AL \cdot AN \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}a^2,$$

$3S_{ALN} = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2$, тогда $S_{\Delta LMN} = S_{\Delta ABC} - 3S_{\Delta ALN} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$

Ответ: $S_{\Delta LMN} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$.

<u>Пример 3.</u> Найти площадь равнобедренного треугольника, если его основание 12см, а высота, опущенная на основание равна отрезку, соединяющему середины основания и боковой стороны.

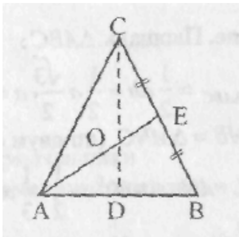


Решение. $DE = CD$, DE - средняя линия треугольника ABC, следовательно, $DE = \frac{1}{2}AC \Rightarrow$ $CD = \frac{1}{2}AC$. ΔACD - прямоугольный. Если катет CD в два раза меньше гипотенузы AC, то угол $\angle CAD = 30°$.

Поэтому $CD = AD \cdot tg30° = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$. $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 12 = 12\sqrt{3}$ (см2).

Ответ: $S = 12\sqrt{3}$ (см2).

<u>Пример 4.</u> В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3см.



Решение. Медиана $AE = 3$см. Точка O пересечение медиан, откуда $AO = 2$см, $OE = 1$ см (см. теорему 8).

По свойству медиан $\frac{CO}{OD} = \frac{2}{1}$, $OD = y \Rightarrow OC = 2y$.

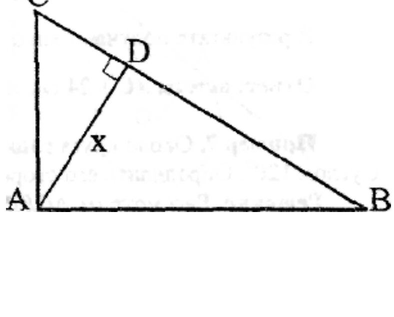
Из $\Delta AOD \Rightarrow AD^2 = 2^2 - y^2 = 4 - y^2$

Из $\Delta ADC \Rightarrow$ $AD^2 = 4^2 - (y + 2y)^2 = 16 - 9y^2$;

$4 - y^2 = 16 - 9y^2$, следовательно, $8y^2 = 12$; $y^2 = \frac{3}{2}$. Тогда $AD^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, тогда $AD = \frac{\sqrt{10}}{2}$, значит $AB = \sqrt{10}$.

Ответ: $AB = \sqrt{10}$ см.

<u>Пример 5.</u> Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15см, а проекция другого катета на гипотенузу - 16см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.



Решение. Обозначим $AD = x$, тогда $x^2 = CD \cdot DB$ (см теорему 12). Из ΔACD $CD^2 = 15^2 - x^2 \Rightarrow$ $CD = \sqrt{15^2 - x^2}$, тогда $x^2 = \sqrt{15^2 - x^2} \cdot 16$;

$x^4 + 16^2 x^2 - 15^2 \cdot 16^2 = 0$,

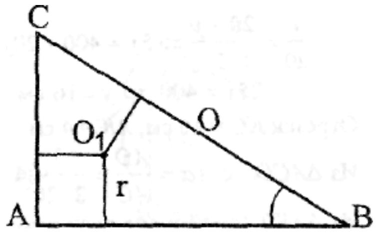
$$\left(x^2\right)_{1,2} = \frac{-16^2 \pm \sqrt{16^4 + 16^2 \cdot 15^2 \cdot 4}}{2} = \frac{-16^2 \pm 16 \cdot 34}{2}$$

$$\left(x^2\right)_2=\frac{-16^2+16\cdot 34}{2}=\frac{16}{2}\cdot(34-16)=144,\quad x=12\text{см.}$$

Отрезок $CD=\sqrt{15^2-12^2}=9$см, гипотенуза $CB=16+9=25$см, катет $AB=\sqrt{25^2-15^2}=20$см. Искомый радиус $r=\frac{S_\Delta}{P}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20}{\frac{1}{2}\cdot(15+20+25)}=5$.

Ответ: $r=5$см.

Пример 6. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности $R=15$см, радиус вписанной окружности $r=6$см. Найти стороны треугольника.



Решение. Центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы, т.е. CB - гипотенуза равна 30см. Обозначим неизвестный угол $\angle CBA=\alpha$. Тогда $AC=30\cdot\sin\alpha$. $AB=30\cdot\cos\alpha$,

$$r=\frac{S}{P}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 30\cdot\sin\alpha\cdot 30\cdot\cos\alpha}{\frac{1}{2}\left(30+30\sin\alpha+30\cos\alpha\right)}=6.$$

$$\frac{30\cdot\sin\alpha\cdot 30\cdot\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=6;\quad 5\sin\alpha\cdot\cos\alpha-(\sin\alpha+\cos\alpha)-1=0.$$

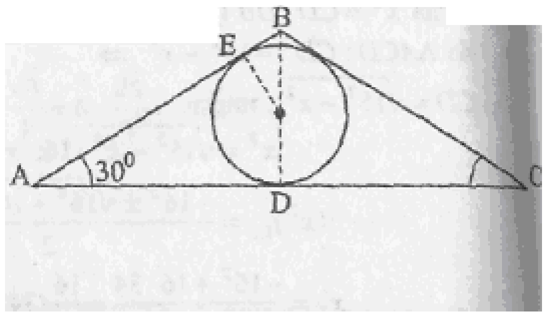
Решаем тригонометрическое уравнение, для чего делаем замену $\sin\alpha+\cos\alpha=t$. В результате получаем $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ (или наоборот).

Ответ: катеты $AC=24$ см, $AB=18$см; гипотенуза $CB=30$ см.

Пример 7. Около круга радиуса R описан равнобедренный треугольник с углом 120°. Определить его стороны.

Решение. Рассмотрим ΔOBE. В нем $\angle BEO=90^\circ$, $\angle OBE=60^\circ$, $OE=OD=R$.

Поэтому $OB=OE\cdot\frac{1}{\sin 60^\circ}=\frac{2OE}{\sqrt{3}}$.



Следовательно,

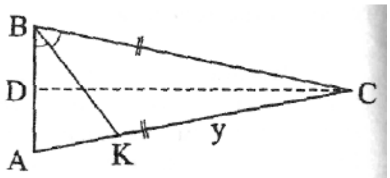
$$BD=R+\frac{2R}{\sqrt{3}}=R\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=R\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}.$$

Из ΔABD находим $AB=\frac{2R\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{3}}$, $AD=R\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)$, $AC=2R\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Ответ: $AB=BC=\frac{2R\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{3}}$, $AC=2R\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Пример 8. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5см и 20см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

Решение. По свойству биссектрисы



(см. теорему 5) пусть $KC = y$, $\frac{y}{20} = \frac{20-y}{5} \Rightarrow$ $5y = 400 - 20y$, $25y = 400$, $y = 16$см. Тогда $KC = 16$см, $AK = 4$см.

Из ΔACD: $\cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{5}{2 \cdot 20} = \frac{1}{8}$.

Из ΔAKB(по теореме косинусов):

$KB^2 = AK^2 + AB^2 - 2AK \cdot AB\cos\alpha = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8} = 36$ см. Отсюда $KB = 6$см.

Ответ: биссектриса $KB = 6$см.

1.1. Задание для самостоятельной работы

1. Площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе, вдвое больше площади исходного треугольника. Найти отношение его катетов.

Ответ: $\sqrt{3}$.

2. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35см и 14см, а биссектриса угла между ними равна 12см.

Ответ: $S_\Delta = 235{,}2$(см2)

3. Медианы треугольника равны 5см, 6см и 5см. Найти площадь этого треугольника.

Ответ: $S_\Delta = 16$(см2).

4. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4см и 5см. Найти площадь треугольника.

Ответ: $S_\Delta = 36$(см2).

5. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18.

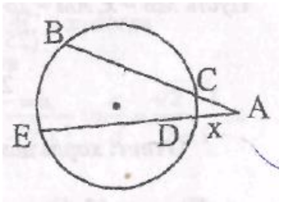
Ответ: $\sqrt{405}$, $\sqrt{640}$.

6. Определить площадь треугольника, если основание его равно а, а углы при основании $30°$ и $45°$.

Ответ: $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{2}}{8\cos 15°}$(см2).

2. Решение задач на окружность.

Пример 1. Из точки вне круга проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47см, а внешний - 9см; внутренний отрезок второй секущей на 72см больше внешнего его отрезка. Определить длину второй секущей.



Решение. По условию, $BC = 47$см, $CA = 9$см, значит $BA = 56$см. Следовательно, $AD \cdot AE = AB \cdot AC = 56 \cdot 9$.

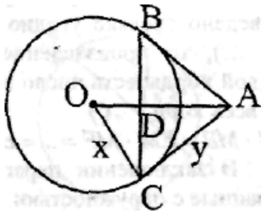
Пусть $AD = x$, тогда $x \cdot (2x + 72) = 56 \cdot 9$; $2x^2 + 72x - 504 = 0$.

$x^2 + 36x - 252 = 0$, $x_{1,2} = -18 \pm \sqrt{18^2 + 252} = -18 \pm 24$, $x = 6$.

$AE = 72 + 2 \cdot 6 = 84$.

Ответ: секущая $AE = 84$см.

Пример 2. Из точки, отстоящей от центра круга на mсм, проведены касательные к кругу. Расстояние между точками касания равно а см. Определить радиус круга.



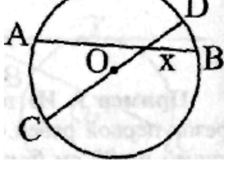
Решение. По условию, $OA = m$, $BC = a$. Пусть $OC = x$, $AC = y$. Из ΔOAC …

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m^2, \\ S_\Delta = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}m \cdot \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m^2, \\ 2xy = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = m^2 + ma, \\ (x-y)^2 = m^2 - ma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{m^2 + ma} \\ x - y = \sqrt{m^2 - ma} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{m^2 + ma} + \sqrt{m^2 - ma}}{2}$$

Ответ: радиус круга $x = \frac{\sqrt{m^2 + ma} + \sqrt{m^2 - ma}}{2}$

Пример 3. Внутри круга, радиус которого равен 13см, дана точка М, отстоящая от центра на расстоянии 5см. Через точку М проведена хорда АВ=25см. Определить длины отрезков, на которые хорда АВ делятся точкой М.



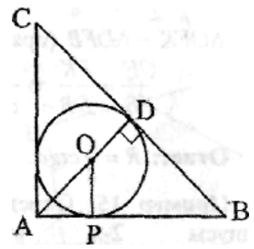
Решение. $R = OD = 13$см, $OM = 5$см, тогда $MD = 8$см, $MC = 18$см.

Пусть $MB = x$, $AM = 25 - x$, Так как $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то $(25 - x) \cdot x = 18 \cdot 8$; $x^2 - 25x + 144 = 0$, $x_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 144}}{2}$; $x_1 = 16$, $x_2 = 9$.

Ответ: хорда делится на отрезки 16 и 9 см.

Пример 4. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, проведенной к гипотенузе.

Решение. Пусть r - радиус вписанной окружности, d - длина высоты. Необходимо найти $\frac{r}{d}$.

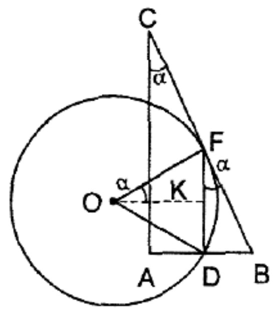


$OP = r$, $OP \perp AB$, ΔAOP подобен ΔABC. Пусть $AB = AC = x$, тогда $CB = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$. Из подобия этих треугольников $\frac{r}{d-r} = \frac{x}{x\sqrt{2}}$; $\frac{d-r}{r} = \frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$; $\frac{d}{r} = \sqrt{2}+1 \Rightarrow$ $\frac{r}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \frac{r}{d} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

Ответ: отношение $\frac{r}{d} = \sqrt{2}-1$.

Пример 5. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна C, а меньший острый угол α. Найти радиус окружности, проходящей через середину меньшего катета и касающейся гипотенузы в ее середине.

Решение. Пусть точка F - точка касания окружности и гипотенузы. Тогда FD - средняя линия треугольника ABC. $BC = c$, $\angle c = \alpha \Rightarrow AB = C \cdot \sin\alpha$, $AC = C \cdot \cos\alpha$. Тогда $DF = \frac{1}{2}AC = C \cdot \cos\alpha$.



ΔOFD - равнобедренный, $FK = \frac{1}{2}FD = \frac{1}{4}C \cdot \cos\alpha$.

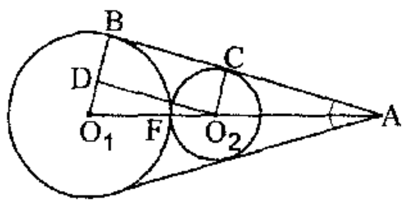
ΔOFK подобен ΔDFB (прямоугольный с равными углами α).

$$\frac{OF}{FB} = \frac{FK}{DB} \Rightarrow \frac{R}{\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}C \cdot \cos\alpha}{\frac{1}{2} \cdot C \cdot \sin\alpha} \Rightarrow \frac{2R}{C} = \frac{2C \cdot \cos\alpha}{4C \cdot \sin\alpha} \Rightarrow R = \frac{C}{4}ctg\alpha.$$

Ответ: $R = \frac{C}{4}ctg\alpha$.

Пример 6. Определить радиусы 2-х внешне касающихся кругов, если расстояние между их центрами равно d`, а угол между общими касательными равен φ.

Решение. По условию, $\angle BAE = \varphi$, следовательно, $\angle BAO_1 = \frac{\varphi}{2}$. Требуется определить $R = O_1B$ и $r = O_2C$. Имеем, $R + r = O_1F + O_2F = O_1O_2 = d$ и $R - r = O_1B - O_2C = O_1D$. Из прямоугольного треугольника ΔO_1DO_2, где



$\angle O_1O_2D = \frac{\varphi}{2}$, находим $O_1D = O_1O_2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$; $R - r = d \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$.

Из двух равенств

$$R = \frac{d \cdot \left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2} = d \cdot \cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right);$$

$$R = \frac{d \cdot \left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2} = d \cdot \sin^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$$

Ответ: $R = \frac{d \cdot \left(1 + \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2} = d \cdot \cos^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$, $R = \frac{d \cdot \left(1 - \sin\frac{\varphi}{2}\right)}{2} = d \cdot \sin^2\left(45° - \frac{\varphi}{4}\right)$.

2.1. Задание для самостоятельной работы

<u>Треугольники и окружности.</u>

1. Центр равностороннего треугольника со стороной, равной 6см, совпадает с центром окружности радиуса 2см. Определить площадь части треугольника, лежащей вне этой окружности.

Ответ: $S = 2 \cdot \left(3\sqrt{3} - \pi\right)$(см2).

2. Криволинейный треугольник составлен тремя равными попарно касающимися дугами окружностей радиуса R. Найти площадь треугольника.

Ответ: $S_\Delta = \frac{3}{2}R^2 \cdot \left(2\sqrt{3} - \pi\right)$(см2).

3. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки в 5см и 12см, Найти катеты.

Ответ: 8см и 15см.

4. В равнобедренном треугольнике основание равно 16см, а боковая сторона равна 10см. Вычислить радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Ответ: $r = \frac{8}{3}$см, $R = \frac{25}{3}$ см, $a = 5$см.

5. В сектор радиуса R вписана окружность радиуса r. Найти периметр сектора.

Ответ: $P = \left(r + \arcsin\frac{r}{R - r}\right)$.

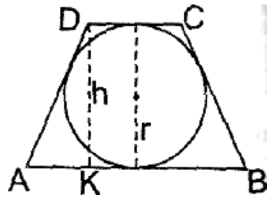
6. Концы диаметра удалены от касательной на расстоянии 16см и 6см. Найти длину диаметра.

Ответ: $d = 22$см.

3. Решение задач на многоугольники.

<u>Пример 1.</u> Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны. Определить радиус вписанного круга.

Решение. Известно, $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ $\Rightarrow 2S=(a+b)\cdot h$.

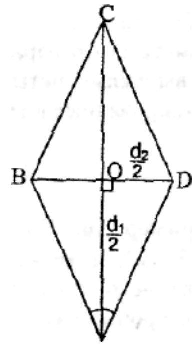


$a+b=c+d$, тогда площадь $S=c\cdot h=2h\cdot h=2h^2$, но $h=2r$, $S=2\cdot(2r)^2=8r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{S}{8}}=\frac{\sqrt{2S}}{4}$.

Ответ: $r=\frac{\sqrt{2S}}{4}$

<u>Пример 2.</u> Сумма диагоналей ромба равна m, а площадь S. Найти сторону ромба.

Решение. Пусть $AC=d_1$, $BD=d_2$. По условию задачи $d_1+d_2=m$, $S=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$



Имеем и решим систему:

$$\begin{cases} d_1+d_2=m \\ d_1\cdot d_2=2S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1=m-d_2 \\ d_2\cdot(m-d_2)=2S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1=m-d_2 \\ d_2^2-md_2+2S=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(d_2)_{1,2}=\frac{m\pm\sqrt{m^2-8S}}{2},\quad (d_1)_{1,2}=\frac{m\mp\sqrt{m^2-8S}}{2}.$$

Пусть $d_1=\frac{m-\sqrt{m^2-8S}}{2}$, $d_2=\frac{m+\sqrt{m^2-8S}}{2}$ (или наоборот), тогда из ΔAOD

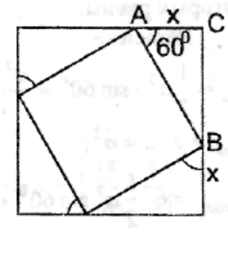
$$AD=\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2+\left(\frac{d_1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{m+\sqrt{m^2-8S}}{4}\right)^2+\left(\frac{m-\sqrt{m^2-8S}}{4}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{m^2}{16}+\frac{m^2}{16}-\frac{8S}{16}+\frac{m^2}{16}+\frac{m^2}{16}-\frac{8S}{16}}=\sqrt{\frac{m^2}{4}-S}=\frac{\sqrt{m^2-4S}}{2}$$

Ответ: сторона ромба равна $\frac{\sqrt{m^2-4S}}{2}$.

<u>Пример 3.</u> В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы по 60°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

Решение. ΔABC: $AB=x$, $BC=x\cdot tg60^\circ=x\cdot\sqrt{3}$,



$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{x^2+3x^2}=2x$,

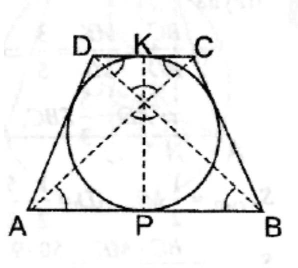
$S_{больш.кв.}=\left(x+x\sqrt{3}\right)^2=x^2\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

$S_{меньш.кв.}=AC^2=(2x)^2=4x^2$

$$\frac{S_{меньш.кв.}}{S_{больш.кв.}}=\frac{4x^2}{x^2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{(1-3)^2}=4-2\sqrt{3}$$

Ответ: отношение площадей равно $4-2\sqrt{3}$.

Пример 4. В равнобедренной трапеции одно основание равно 40см, а другое - 24см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.



Решение. Пусть $OC = x$, $OA = y$, $AD = 40$ см, $BC = 24$см. Из равенства треугольников ABC и ACD следует равенство углов $\angle AOD = \angle ODA = \angle OCB = \angle OBC$ и равнобедренность треугольников AOD и BOC.

По теореме Пифагора, из ΔAOD и ΔBOC:

$x^2 + x^2 = 24^2$, $2x^2 = 24^2$, $x = \sqrt{\frac{24^2}{2}}$.

$y^2 + y^2 = 40^2$, $2y^2 = 40^2$, $y = \sqrt{\frac{40^2}{2}}$

$$KP = h = OK + OP = \sqrt{x^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2} + \sqrt{y^2 - \left(\frac{40}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{24^2}{2} - \left(\frac{24}{2}\right)^2} + \sqrt{\frac{40^2}{2} - \left(\frac{40}{2}\right)^2} =$$

$$= 24 \cdot \frac{1}{2} + 40 \cdot \frac{1}{2} = 32.$$

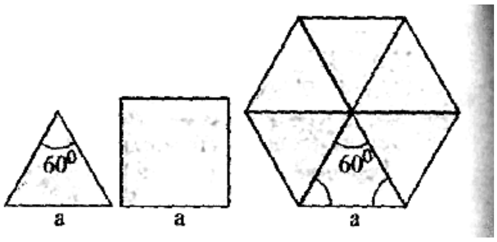
Площадь трапеции $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{24+40}{2} \cdot 32 = 1024$ (см2).

Ответ: площадь трапеции равна 1024(см2).

Пример 5. Найти отношение площадей равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, длины сторон которых равны.

Решение. $S_\Delta = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{кв.} = a^2$, $S_{шест.} = 6 \cdot \frac{1}{2}a^2 \sin 60^\circ = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

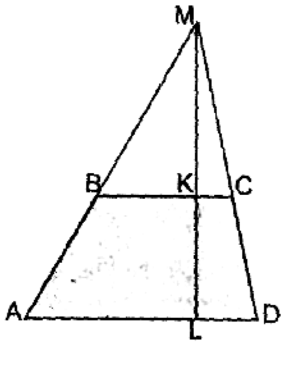


$$S_\Delta : S_{кв.} : S_{шест.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : a^2 : \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$$

Ответ: $S_\Delta : S_{кв.} : S_{шест.} = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$.

Пример 6. Вычислить площадь трапеции $ABCD$, если длины ее оснований относятся как 5:3, а площадь треугольника ADM, где $M = AB \cap CD$, равна 50см2,

Решение. ΔAMD` подобен ΔBMC (см.рисунок).



Откуда $\frac{BC}{AD} = \frac{MK}{ML} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{3}{5} \Rightarrow AD = \frac{5}{3}BC$, $ML = \frac{5}{3}MK$.

$S_{AMD} = \frac{1}{2}ML \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}BC \cdot \frac{5}{3}MK = \frac{25}{9} \cdot \frac{BC \cdot MK}{2} = 50$ (см2)

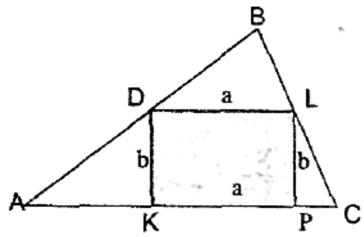
(по условию). $S_{BMC} = \frac{BC \cdot MK}{2} = \frac{50 \cdot 9}{2} = 18$ (см2),

$S_{трап.} = 50 - 18 = 32$ (см2)

Ответ: площадь трапеции 32 (см2).

Пример 7. В треугольник со сторонами 10см, 17см и 21см вписан прямоугольник с периметром в 24см так, что одна его сторона лежит на большей стороне треугольника. Найти стороны прямоугольника.

Решение. Из условия (см. рисунок) $AC = 21$ см, $AB = 17$ см, $BC = 10$ см. Пусть стороны прямоугольника a и b.



Очевидно, $2a + 2b = 24$, или $a + b = 12$. Определим ΔABC углы $\angle A$ и $\angle C$. Используем теорему косинусов:

$10^2 = 21^2 + 17^2 - 2 \cdot 21 \cdot 17 \cdot \cos A$,

$17^2 = 21^2 + 10^2 - 2 \cdot 21 \cdot 10 \cdot \cos C$

Из последних равенств находим $\cos A = \frac{15}{17}$, $\cos C = \frac{3}{5}$, $ctgA = \frac{15}{8}$, $ctgC = \frac{3}{4}$.

Рассмотрим ΔADK. В нем $AD = b \cdot ctgA = b \cdot \frac{15}{8}$.

Из ΔPLC, $PC = b \cdot ctgC = b \cdot \frac{3}{4}$. Тогда $AC = 21 = a + b \cdot \left(\frac{15}{8} + \frac{3}{4}\right)$

Решим систему

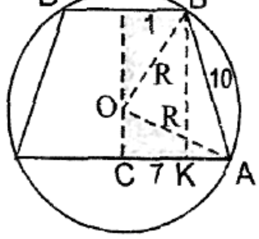
$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 21 = a + \frac{21}{8} b \end{cases}$$

$b = \frac{72}{13}$, $a = \frac{84}{13}$

Ответ: стороны прямоугольника равны $\frac{72}{13}$ и $\frac{84}{13}$.

Пример 8. Найти радиус окружности, описанной около равнобокой трапеции с основаниями 2 и 14 и боковой стороной 10.

Решение. Обозначим (см. рисунок) $OD = n$, $OC = m$. Из ΔABK: $BK = \sqrt{100 - 36} = 8$



Из двух треугольников OBD и OCA:

$$\left.\begin{matrix} OB = R = \sqrt{n^2 + 1} \\ OC = R = \sqrt{m^2 + 49} \end{matrix}\right. \Rightarrow \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{m^2 + 49}$$

$$\begin{cases} m + n = 8 \\ \sqrt{n^2 + 1} = \sqrt{m^2 + 49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n = 8 \\ m^2 - n^2 + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 - n \\ (8 - n)^2 - n^2 + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m=8-n \\ -16n+64+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=7 \\ m=1 \end{cases}.$$

Вычислим $R=\sqrt{n^2+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Ответ: $R=5\sqrt{2}$

<u>Пример 9.</u> Окружность радиуса 13см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18см. На какие отрезки делит окружность каждую из двух других сторон квадрата?

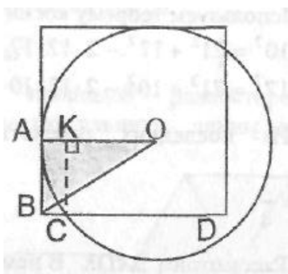
Решение. Искомые отрезки $BC=x$, $CD=y$.

Очевидно, $x+y=18$. $AOCD$ - прямоугольная трапеция.

В ней $AO=13$см, $AB=18-13=5$см, $OC=13$см.

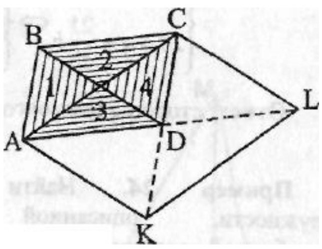
Тогда $BC=AK=AO-KO=13-\sqrt{13^2-5^2}=13-12=1$см

$x=1$см, $y=18-1=17$ см



Ответ: отрезки на стороне квадрата равны 1см и 17 см.

<u>Пример 10.</u> Площадь четырехугольника равна 5. Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.



Решение. $SABCD=S$ (заштриховано на рисунке).

$AC \parallel KL$, $AK \parallel BD \parallel CL$ (по условию).

$AC=KL$, $AK=BD=CL$ (по условию задачи).

Рассмотрим ΔABC и ΔKDL. В них $AB=KD$, $BC=Dl$, т.к. фигуры $ABDK$ и $BDLC$ - параллелограммы. Кроме того, $\angle ABC=\angle KDL$ (у них взаимно параллельные стороны). Итак, $\Delta ABC=\Delta KDL$, $S_{ABC}=S_{KDL}$.

Рассмотрим $ACLK$ - параллелограмм.

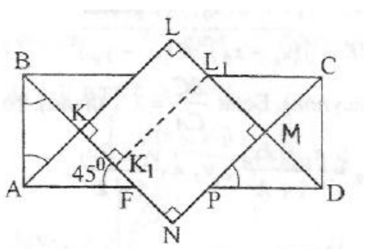
Его $S=S_3+S_4+S_{\Delta DLC}+S_{\Delta ADK}=S_3+S_4+(S_4+S_2)+(S_3+S_1)+(S_1+S_2)=$

$=2S_1+2S_2+2S_3+2S_4=2\cdot(S_1+S_2+S_3+S_4)=2S$

Ответ: площадь параллелограмма равна $2S$.

<u>Пример 11.</u> В прямоугольнике со сторонами a и b проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

Решение. Пусть $AB=a$, $AD=b$.



Покажем, что $KLMN$ - квадрат.

Очевидно, что $BN \parallel LD$, так как $\angle BFA=\angle LDP=45^\circ$, аналогично $AL \parallel CN$. Все углы $\angle K=\angle L=\angle M=\angle N=90^\circ$.

Рассмотрим ΔBL_1K_1. В нем $\angle BK_1L_1=90^\circ$, $BL_1=b-a$, т.к. $L_1C=a$, из ΔL_1CD ($CD=a$, т.к. равнобедренный). Тогда $L_1K_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(b-a)=LK$. Точно так же можно показать, что вторая сторона четырехугольника $KLMN$ также равна $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(b-a)$.

Итак, $KLMN$ - квадрат. $S_{KLMN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(b-a)\right)^2=\frac{(b-a)^2}{2}$.

Ответ: площадь четырехугольника равна $\frac{(b-a)^2}{2}$.

3.1. Задание для самостоятельной работы

Многоугольники.

1. В трапеции ABCD с длинами оснований AD =12см, BC = 8см на луче BC взята такая точка M, что линия AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину CM.

Ответ: CM = 2,4см.

2. Найти диагональ и боковую сторону равнобокой трапеции с основаниями 20см и 12см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании.

Ответ: $8\sqrt{5}$ см и $4\sqrt{5}$ см.

3. Около окружности с диаметром 15см описана равнобокая трапеция с боковой стороной 17см. Найти основания трапеции.

Ответ: $a=9$ см и $b=25$ см.

4. Периметр параллелограмма равен 90см, а острый угол содержит 60°. Диагональ делит тупой угол в отношении 1:3. Найти стороны.

Ответ: 15см и 30см.

5. Длины диагоналей ромба относятся как 3:4, Во сколько раз площадь ромба больше площади вписанного в него круга?

Ответ: $\frac{25}{6\pi}$.

6. Высота ромба равна 12см, а одна из его диагоналей равна 15см, Найти площадь ромба.

Ответ: $S=150$(см2).

7. Около окружности описана равнобокая трапеция, длины оснований которой равны 3 и 6. Найти радиус окружности.

Ответ: $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. В трапецию вписан круг. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

9. В равнобедренной трапеции определить длину диагонали, если одна сторона ее равна 5см, а другие три равны каждая 4см.

Ответ: $d=6$ см.

10. В ромб с острым углом 30° вписан круг. Площадь круга равна Q.

Найти площадь ромба.

Ответ: $S = \frac{80}{\pi}$.

4. Задание для самостоятельной работы

Метод координат.

1. Определить углы равнобедренного треугольника, если его площадь относится к площади квадрата, построенного на его основании как $\sqrt{3}:12$.

Ответ: углы треугольника равны 30°, 30°, 120°.

2. Найти биссектрису прямого угла треугольника, у которого катеты равны 10см и 6см.

Ответ: $\frac{15}{4}\sqrt{2}$ см.

3. Найти длины медиан треугольника, у которого одна сторона 10см; высота опущенная на указанную сторону, 4см; угол, прилежащий к указанной к стороне, равен 45°.

Ответ: медианы треугольника равны $\sqrt{17}$ см, $2\sqrt{17}$ см, $\sqrt{53}$ см.

5. Итоговый тест по теме «Планиметрия».

1. Величина одного из углов треугольника равна 20°. Найти величину угла между биссектрисами двух других углов треугольника.

1) 80°; 2) 81°; 3) 82°; 4) 83°; 5) 84°.

2. Стороны четырехугольника относятся как 1:2:2:3, наименьшая из его, сторон равна 7. Найти периметр подобного ему четырехугольника, если его наибольшая сторона равна 10,5.

1)14; 2)21; 3)24,5; 4)28; 5)31,5.

3. Около круга радиуса 2 описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 20. Найти площадь этой трапеции.

1)20; 2)24; 3)28; 4)30; 5)32.

4. Два смежных угла относятся как 5:3. Разность этих углов равна 1)60°; 2)30°; 3)22,5°; 4)45°; 5)15°.

5. Средняя линия трапеции равна 24дм и делится диагональю на два отрезка, разность между которыми равна 6дм. Большее основание трапеции равно

1) 30дм; 2) 24дм; 3) 50дм; 4) 44дм; 5) 36дм.

6. Длины оснований трапеции относятся как 7:3 и различаются на 8. Найти длину средней линии трапеции.

1)6; 2)10; 3)12; 4)8; 5)5.

7. Около круга описана трапеция со средней линией длиной 20см. Найти периметр трапеции.

1)40; 2)120; 3)100; 4)80; 5)60.

8. В равнобедренном треугольнике величина угла между высотой к основанию и боковой стороной на 18° меньше величины угла при основании. Найти величину угла при основании треугольника.

1) 50°; 2) 51°; 3) 52°; 4) 53°; 5) 54°.

9. В равнобедренном треугольнике основание 24см, боковая сторона 13см. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

1)2,4; 2) $3\frac{1}{3}$; 3)2,5; 4)33,8; 5)16,9.

10. Длины сторон треугольника 13см, 14см, 15см. Найти площадь вписанного круга.

1) 66π 2) 16π; 3) 25π; 4) $31{,}36\pi$; 5) $54{,}76\pi$.

11. Сторона ромба 13см, а его большая диагональ 24см. Найти площадь ромба.

1) 120; 2) 240; 3) 60; 4) 169; 5) 156.

12. В прямоугольном треугольнике один катет 14 см, а радиус описанной окружности 25см. Найти второй катет.

1) 73,7; 2) 48; 3) 20,7; 4) 44; 5) 42.

13. Найти угол, составленный касательной и хордой, если хорда делит окружность на две части в отношении 3:7.

1) 108°; 2) 72°; 3) 54°; 4) 90°; 5) 36°.

14. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, образуют между собой угол 60°. Сумма длин касательных равна 20см. Найти расстояние между точками касания.

1)20; 2)5; 3)40; 4)30; 5)10.

15. Большее основание трапеции 24см. Найти ее меньшее основание, если расстояние между серединами диагоналей равно 4см.

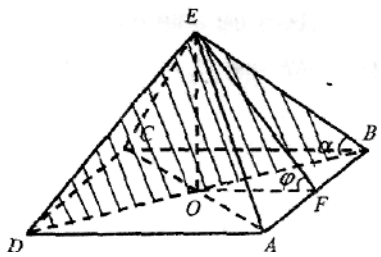
1)12; 2)8; 3)16; 4)10; 5)6.

Ответы к тесту.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	1	4	1	2	4	5	5	2	3	2	3	2	3

6. Решение задач на многогранники и тела вращения.

Задача 1. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, зная угол α наклона бокового ребра к плоскости основания и площадь S ее диагонального сечения. Найти также угол, образованный боковой гранью с плоскостью основания.



Решение, $ABCD$ - квадрат. Угол $\alpha = \angle OBE$ (см.рис.), так как OB - проекция ребра BE на плоскость основания.

Для построения линейного угла φ двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания при ребре AB соединим середину F отрезка AB с точками O и E.

$S_{осн.} = a^2 = \frac{d^2}{2}$ (d - диагональ квадрата).

Рассмотрим ΔOBE. Из него $OE = h = \frac{d}{2} \cdot tg\alpha$ и по условию, $\frac{d}{2} \cdot H = S$. Итак,

$$\begin{cases} H = \frac{d}{2} \cdot tg\alpha \\ H = \frac{2}{d} \cdot S \end{cases} \Rightarrow H^2 = S \cdot tg\alpha \text{ и } \left(\frac{d}{2}\right)^2 = S \cdot ctg\alpha.$$

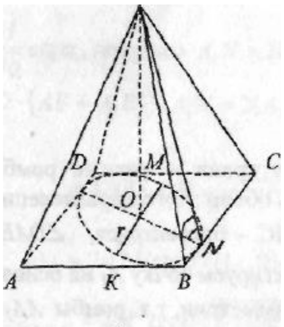
Следовательно, $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{2} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 2S \cdot ctg\alpha \cdot \sqrt{S \cdot tg\alpha} = \frac{2}{3}\sqrt{S^2 \cdot ctg\alpha}$

Угол φ определим из треугольника OFE, где $OF = \frac{a}{2} = \frac{d}{2\sqrt{2}}$,

$tg\varphi = \frac{OE}{OF} = H : \frac{d}{2\sqrt{2}} = \sqrt{S \cdot tg\alpha} : \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{S \cdot ctg\alpha} = \sqrt{2} \cdot tg\alpha$, $V = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{S^3 \cdot ctg\alpha}$; $tg\varphi = \sqrt{2} \cdot tg\alpha$.

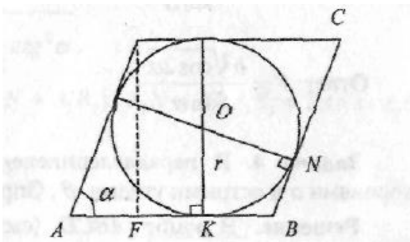
Ответ: $V = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{S^3 \cdot ctg\alpha}$; $tg\varphi = \sqrt{2} \cdot tg\alpha$.

Задача 2. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом α. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.



а)

б)



Решение. Из чертежа (рис. а) $\angle ONE = \beta$.

Используя рисунок б) находим $S_{осн.}$:

$DF = 2OK = 2r$, из треугольника AFD, где $\angle A = \alpha$, имеем $AD = a = \frac{DF}{\sin\alpha} = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

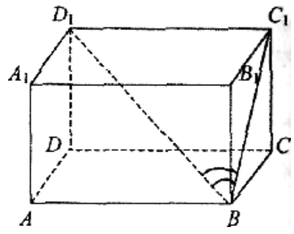
Далее находим $S_{осн.} = AB \cdot DF = a \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$. Из ΔONE (рис а), где $ON = r$, а $\angle ONE = \beta$.

Находим H. $H = OE = ON \cdot tg\beta = r \cdot tg\beta$. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{4r^3 \cdot tg\beta}{3\sin\alpha}$

$$S_{п.п.} = S_{осн.} + S_{бок.} = S_{осн.} + \frac{S_{осн.}}{\cos\beta} = S_{осн.} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{4r^2}{\sin\alpha} \cdot \frac{1+\cos\beta}{\cos\beta} = \frac{8r^2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Ответ: $V=\dfrac{4r^3\cdot tg\beta}{3\sin\alpha}$; $S_{п.п.}=\dfrac{8r^2\cos^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

Задача 3. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания равна b.

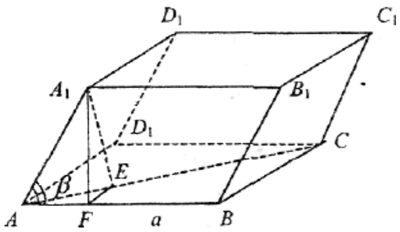


Решение. Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ правильная, т.е. ребро D_1C_1 перпендикулярно грани BB_1C_1C. (см. рис.) и, следовательно, это ребро перпендикулярно любому отрезку в грани, в частности диагонали C_1B. Но тогда $\angle D_1BC_1=\alpha$. Рассмотрим ΔD_1C_1B. В нем $D_1C_1=b$, тогда $BC_1=b\cdot ctg\alpha$. Из ΔB_1C_1B имеем $H=\sqrt{(BC_1)^2-(B_1C_1)^2}=\sqrt{\left(b\cdot ctg^2\alpha-b^2\right)}=\dfrac{b\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

Тогда $V=b^2\cdot H=\dfrac{b\cdot\sqrt[3]{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

Ответ: $V=\dfrac{b\cdot\sqrt[3]{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

Задача 4. В параллелепипеде все его грани - равные ромбы со сторонами a и острыми углами β. Определить объем этого параллелепипеда.



Решение. В ромбе $ABCD$ (см. рис.) AC - биссектриса, $\angle DAB=\beta$, $AB=a$, т.е. $S=a^2\cdot\sin\beta$, $\angle CAB=\dfrac{\beta}{2}$. Спроектируем точку A_1 на основание, точка E попадет на биссектрису (по законам симметрии, т.к. ромбы AA_1B_1B и AA_1D_1D равны). Построим $EF\perp AB$ и соединим точки A_1F.

Рассмотрим ΔAA_1F. В нем $\angle A_1FA=90^\circ$. (см. теорему 6). $AA_1=a$, $\angle A_1AF=\beta$. Находим $AF=a\cdot\cos\beta$. Из ΔAEF: $AE=\dfrac{AF}{\cos\dfrac{\beta}{2}}=\dfrac{a\cos\beta}{\cos\dfrac{\beta}{2}}$.

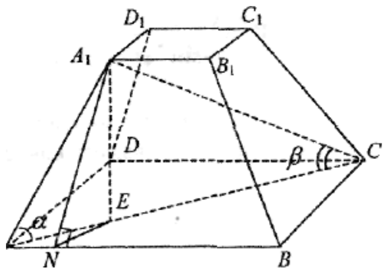
Рассмотрим ΔAA_1E.

В нем $A_1E=H=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2\cos\beta}{\cos^2\dfrac{\beta}{2}}}=\dfrac{a}{\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}\cdot\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-\cos^2\beta}$.

$V=2a^3\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot\sqrt{\sin\left(\dfrac{3\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$

Ответ: $V=2a^3\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sqrt{\sin\left(\frac{3\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$.

Задача 5. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна H, боковое ребро и диагональ пирамиды наклонены к плоскости основания под углами α и β. Найти ее боковую поверхность.



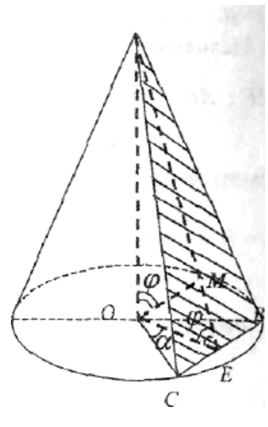
Решение. $H=A_1E$ - высота усеченной пирамиды (см. рис.) упадет на биссектрису угла основания, т.е. на диагональ квадрата (см решение задачи 4), $EN\perp AB$, $A_1N\perp AB$. Из двух прямоугольных треугольников AA_1E и EA_1C, имеем $AE=H\cdot ctg\alpha$ и $EC=H\cdot ctg\beta$. Искомая $S_{бок.}=4\cdot\frac{AB+A_1B_1}{2}\cdot A_1N$. Апофему A_1N найдем из ΔA_1EN, где $EN=\frac{H}{\sqrt{2}}\cdot ctg\alpha$, получим $A_1N=H\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}ctg^2\alpha}$.

$$S_{бок.}=2\cdot\left(AB+A_1B_1\right)\cdot A_1N=2\cdot\left(A_1B_1+2AN+A_1B_1\right)\cdot A_1N=2\cdot\left(2A_1B_1+2AN\right)\cdot A_1N=$$

$$=4NB\cdot A_1N=\frac{4EC\cdot\sqrt{2}\cdot A_1N}{2}=2\sqrt{2}Hctg\beta\cdot H\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}ctg^2\alpha}=2H^2ctg\beta\cdot\sqrt{2+ctg^2\alpha}.$$

Ответ: $S_{бок.}=2H^2ctg\beta\cdot\sqrt{2+ctg^2\alpha}$

Задача 6. Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α; расстояние плоскости от центра основания равно a. Найти объем конуса.



Решение. Рассмотрим ΔDOE (см. рис). В нем $\angle OED=\varphi$, $OM\perp DE$ и $OM=a$, $\angle MOD=\angle OED=\varphi$.

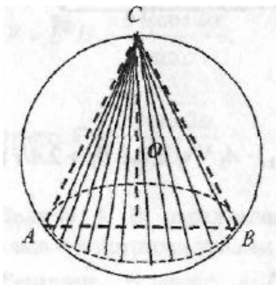
Из ΔOME: $OE=\frac{a}{\sin\varphi}$. Из ΔOMD: $OD=H\cdot\frac{a}{\cos\varphi}$.

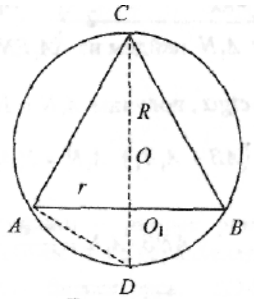
Из ΔOCE найдем $OC=R=\frac{OE}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\varphi\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

$$V_{кон.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot H=\frac{1}{3}\left(\pi R^2\right)\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{a}{\sin\varphi\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2\cdot\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ответ: $V_{кон.} = \dfrac{\pi a^3}{3\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

Задача 7. В шар вписан конус, объем которого равен $\frac{1}{4}$ объема шара. Найти объем шара, если высота конуса равна H.


а)


б)

Решение. Пусть в осевом сечении конуса (см. рис.б) $CO = R$, $AO_1 = r$, $CO = H$. $V_{шар.} = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_{кон.} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H$.

По условию задачи $4V_{кон.} = V_{шар.}$, т.е. $\frac{4}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow r^2 \cdot H = R^3$.

Рассмотрим ΔADC. В нем $\angle A = 90°$ (опирается на диаметр), $AO_1 \perp DC$, значит, $AO_1^2 = DO_1 \cdot O_1C$. Таким образом, $r^2 = H \cdot (2R - H)$. Решим систему

$$\begin{cases} r^2 H = R^3 \\ r^2 = H \cdot (2R - H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = H \cdot (2R - H), \\ R^3 - 2H^2R + H^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r^2 = H \cdot (2R - H), \\ (R - H)\left(R^2 + RH - H^2\right) = 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы.

$R_1 = H$; $R_{2,3} = \dfrac{-H \pm \sqrt{H^2 + 4H^2}}{2} = \dfrac{-H \pm H\sqrt{5}}{2}$.

Итак, два подходящих решения

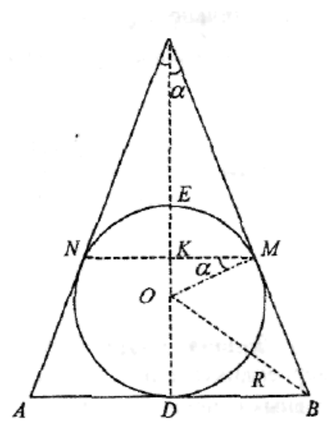
$R = H$; $R = \dfrac{H\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}$.

$V = \frac{4}{3}\pi H^3$ и $V = \frac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\left(\sqrt{5} - 1\right)H}{2}\right)^3$

Ответ: задача имеет два решения $V = \frac{4}{3}\pi H^3$ и $V = \frac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\left(\sqrt{5} - 1\right)H}{2}\right)^3$

Задача 8. В конус с радиусом основания R и углом α между высотой и образующей вписан шар, касающийся основания и боковой поверхности конуса. Определить объем части конуса, расположенной над шаром.

Решение. Рассмотрим осевое сечение фигуры (см.рис.). Из него $V_{иск.} = V_{кон.NMC} - V_{ш.с.MNE} =$



$= \frac{1}{3}\pi (MK)^2 \cdot KC - \frac{\pi (KE)^2}{3} \cdot (3r - KE)$,

где r - радиус шара.

Из треугольника DOB находим $r - OD = DB \cdot tg\angle DBO = DB \cdot tg\frac{\angle DBC}{2} =$

$= R \cdot tg\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$. Из. ΔOMK, где $OM = r$, $\angle OMK = \alpha$ (стороны углом DCB и OMK взаимно перпендикулярны) имеем $MK = OM \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha$ и $OK = r \cdot \sin\alpha$. Значит, $KE = OE - OK = r - r \cdot \sin\alpha = r(1 - \sin\alpha)$.

Отрезок $KC = MK \cdot ctg\alpha = r \cdot \cos\alpha \cdot ctg\alpha$. Следовательно,

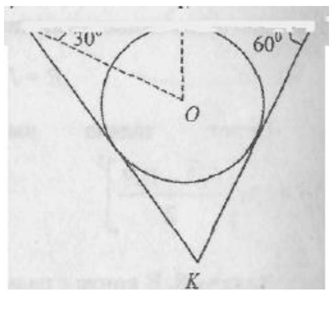
$$V = \frac{\pi}{3} r^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot ctg\alpha - \pi r^2 (1 - \sin\alpha)^2 \cdot r - \left(\frac{r(1 - \sin\alpha)}{3}\right) = \frac{\pi r^3 (1 - \sin\alpha)^2}{3\sin\alpha}.$$

Подставим $r = R \cdot tg\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$, $V = \frac{4\pi R^3 tg^3\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\sin^4\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha}$.

Ответ: $V = \frac{4\pi R^3 tg^3\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\sin^4\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin\alpha}$.

Задача 9. В правильную треугольную призму вписан шар, касающийся трех граней и обоих оснований призмы. Найти отношение поверхности шара к полной поверхности призмы.

Решение. Проведем секущую плоскость через центр шара параллельно основаниям призмы; в сечении получится ΔKLM с вписанной окружностью большого радиуса R (см. рис).



Очевидно, что высота призмы равна $2R$ - диаметру вписанного шара. Из ΔLNO, где $ON = R$, $\angle NLO = 30°$, найдем $LN = R\sqrt{3}$, т.е. $LM = 2R\sqrt{3} = a$.

$S_{бок.пр.} = 3aH = 3 \cdot 2R\sqrt{3} \cdot 2R = 12R^2\sqrt{3}$; $S_{осн.} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3R^2\sqrt{3}$.

Следовательно, $S_{п.п.} = 12R^2\sqrt{3} + 6R^2\sqrt{3} = 18R^2\sqrt{3}$.

Поверхность шара $S_{п.ш.} = 4\pi R^2$. $\frac{S_{п.ш.}}{S_{п.п.}} = \frac{4\pi R^2}{18R^2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$

Ответ: $\frac{S_{п.ш.}}{S_{п.п.}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$

6.1. Задание для самостоятельной работы

Многогранники и тела вращения.

1. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол в $60°$. Найти объем конуса.

Ответ: $V = \dfrac{\pi\sqrt{3}\cdot l^3}{24}$.

2. Найти объем конуса, если в его основании хорда b стягивает дугу β, а высота составляет с образующей угол α.

Ответ: $V = \pi b^3 \cdot ctg\alpha \cdot \dfrac{1}{24\sin^3\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$

3. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет с основанием угол α. Найти объем цилиндра.

Ответ: $V = a^3\dfrac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а остальные четыре - в плоскости ее основания. Определить ребро куба, если высота пирамиды равна H, а боковое ребро равно l.

Ответ: $x = \dfrac{H\cdot\sqrt{2\left(l^2 - H^2\right)}}{H + \sqrt{2\cdot\left(l^2 - H^2\right)}}$.

5. Прямой параллелепипед, имеющий в основании ромб со стороной a и острым углом φ, пересечен плоскостью, проходящей через вершину угла φ и дающей в сечении ромб с острым углом $\dfrac{\varphi}{2}$. Определить площадь сечения.

Ответ: $S_{сеч.} = 2a^2\cdot\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot ctg\left(\dfrac{\varphi}{4}\right)$.

6. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде даны: диагональ a, двугранный угол α при нижнем основании и высота H. Найти объем усеченной пирамиды.

Ответ: $V = \dfrac{H}{6}\cdot\left(3\cdot\left(d^2 - H\right) + 2H^2 + ctg^2\alpha\right)$.

7. В шар радиуса R вписаны прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, и наибольшая ее боковая грань есть квадрат. Найти объем призмы.

Ответ: $V=\dfrac{R^3\cdot\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$.

8. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Найти объем конуса, если ребро пирамиды равно l, и плоский угол между двумя соседними боковыми ребрами равен φ.

Ответ: $V=\dfrac{\pi\cdot l^3\sin^2\left(45°-\dfrac{\varphi}{2}\right)\cdot\sqrt{3-4\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}}{9\sqrt{3}}$.

9. На высоте конуса, равной H, как на диаметре описан шар. Определить объем части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой равен φ.

Ответ: $V=\dfrac{\pi H^3\cdot\cos^4\varphi}{6}$.

10. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды в два раза больше стороны основания. Найти угол между апофемой боковой грани и не пересекающей ее высотой треугольника, лежащего в основании пирамиды.

Ответ: $a=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{5}}{30}\right)$.

7. Итоговый тест по теме «Стереометрия»

1. Основание призмы - равнобедренная трапеция, диагонали которой взаимно перпендикулярны. Если высота призмы равна 6, а объем призмы - 96, то высота трапеции равна

1)1; 2)2; 3)4, 4)8; 5)16.

2. Основание прямоугольного параллелепипеда - квадрат. Найти объем параллелепипеда, если высота его равна 4, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол $45°$.

1) 36; 2) 28; 3) 32; 4) 40; 5) 42.

3. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Площадь боковой поверхности пирамиды равна 192. Найти радиус окружности, описанной около боковой грани пирамиды.

1) 11; 2) 6; 3) 12; 4) 8; 5) 10.

4. Площадь осевого сечения прямого кругового цилиндра равна 24. Найти площадь его боковой поверхности.

1) $36\sqrt{\pi}$; 2) 72; 3) 24π; 4) 68; 5) $8\pi^2$.

5. Образующая прямого кругового конуса равна 4 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найти объем конуса.

1) 8π; 2) 6π; 3) 4π; 4) 10π; 5) 12π.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение

через вершину A и ребро B_1C_1. Если сторона основания призмы равна 20, а боковое ребро - 21, то периметр сечения равен

1) 69; 2) 78; 3) 62; 4) 124; 5) 61.

7. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 6, а апофема - 9, следовательно, высота пирамиды равна

1) $3\sqrt{6}$; 2) $6\sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{5}$; 4) 6; 5) 3.

8. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны 3, 4 и 5. Тогда ее объем равен

1) 60; 2) 40; 3) 30; 4) 20; 5) 10.

9. Образующая цилиндра равна 21, а диагональ осевого сечения - 29. Следовательно, радиус основания цилиндра равен

1) 21; 2) 18; 3) 24; 4) 14; 5) 10.

10. Прямоугольник со сторонами 8 и 4 вращается вокруг меньшей стороны. Следовательно, площадь поверхности тела вращения равна

1) 96π; 2) 192π; 3) 48π; 4) 64π; 5) 128π.

11. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 40 и 9, а угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания равен 60°. Тогда высота параллелепипеда равна

1) 41; 2) $41\sqrt{2}$; 3) $7\sqrt{31}$; 4) 31; 5) $41\sqrt{3}$.

12. Если высота правильной шестиугольной пирамиды равна 2, а ребро основания - 2, то площадь ее боковой поверхности равна

1) $12\sqrt{7}$; 2) $6\sqrt{6}$; 3) $12\sqrt{3}$; 4) $8\sqrt{6}$; 5) $6\sqrt{7}$.

13. Образующая конуса равна 8, а угол между ней и плоскостью основания равен 60°. Тогда длина окружности основания равна

1) 4π; 2) $4\pi\sqrt{3}$ 3) $4\pi\sqrt{2}$ 4) 8π; 5) $8\pi\sqrt{3}$.

14. Шар с центром в точке O касается плоскости в точке A. Если точка #лежит в плоскости касания, $AH = 2$ и $OH = 4$, то объем шара равен

1) $64\pi\sqrt{3}$; 2) $32\pi\sqrt{3}$; 3) 64π; 4) $96\pi\sqrt{3}$; 5) 32π.

Выводы:

По окончании курса учащиеся должны:

- знать алгоритм решения основных задач;
- понимать планиметрические и стереометрические чертежи;
- распознавать на чертежах и моделях геометрические фигуры (треугольники и их частные виды, четырехугольники и их частные виды…, многоугольники, окружности и круг).

По окончании курса учащиеся должны иметь навыки:

- выполнять чертеж по условию геометрической задачи;
- решать задачи на вычисление геометрических величин, проводя необходимую аргументацию;
- строить сечения геометрических тел.

По окончании курса учащиеся должны уметь:

- анализировать и обобщать;
- самостоятельно решать задачи;
- определять цели и добиваться результата;
- применять полученные знания для решения
- практических задач в повседневной жизни.